T^{ale} ES	Bac Métropole – 2011	Correction

Exercice n°1 : (*5 points*)

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice de fréquence : y_i	100,3	98,9	91,6	89,5	87,6	85,4	84	79,9	76

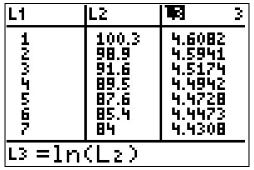
1°/ *a*) En 2012, le rang est 12.
$-2{,}89\times 12+102{,}59 = 67{,}91$

Si cet ajustement reste valable jusqu'en 2012, l'indice de fréquence pour le BTP peut être estimé à **67,91**.

***b*)** $\frac{67{,}91-84}{84}\approx -0{,}1915$

Selon ce modèle, l'indice de fréquence a **diminué d'environ 19,15 %** entre 2007 et 2012.

2°/ *a*) A l'aide des listes de la calculatrice, on complète le tableau.



x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,608	4,594	4,517	4,494	4,473	4,447	4,431	4,381	4,331

***b*)** A l'aide de la calculatrice, la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindes carrés a pour équation

$$\boldsymbol{z=-0{,}0328\,x+4{,}6393} \qquad \left(\textit{coef. arrondis à } 10^{-4}\right)$$

***c*)** Puisque, d'une part, $z=\ln y$ et, d'autre part, $z=-0{,}0328\,x+4{,}6393$

on en déduit
$$\begin{aligned} \ln y &= -0{,}0328\,x+4{,}6393 \\ y &= e^{-0{,}0328x+4{,}6393} \\ y &= e^{4{,}6393}\times e^{-0{,}0328x} \end{aligned}$$

Or $e^{4{,}6393}\approx 103{,}5$. Une nouvelle expression de y en fonction de x est donc

$$\boldsymbol{y = 103{,}5\,e^{-0{,}0328x}}$$

3°/ Le 1^er^ ajustement ne permet pas d'atteindre l'objectif de réduction de 25% de l'indice de fréquence entre 2007 et 2012. (*Calculé à la question* **1°/ *b*)**)

- $103{,}5e^{-0{,}0328\times 12}\approx 69{,}8$

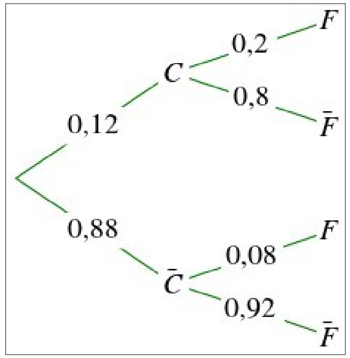
Avec le 2^nd^ modèle, l'indice de fréquence en 2012 peut être estimé à 69,8.

De plus $\frac{69{,}8-84}{84}\approx -0{,}169$ Selon ce modèle, l'indice de fréquence a **diminué d'environ 16,9 %** entre 2007 et 2012.

- Par conséquent, **aucun des deux modèles** ne permet d'atteindre l'objectif de réduction de 25% de l'indice de fréquence entre 2007 et 2012.

Exercice n°2 : (*5 points – non spécialistes*)

1°/ D'après l'énoncé, on a



2°/ *a*)
$$\begin{aligned} p(C\cap F) &= p(C)\times p_C(F) \\ &= 0{,}12\times 0{,}2 \\ &= 0{,}024 \end{aligned}$$

La probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme est 0,024.

***b*)** Les évènement C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} p(F) &= p(C\cap F)+p(\overline{C}\cap F) \\ &= 0{,}024+0{,}88\times 0{,}08 \\ &= 0{,}0944 \end{aligned}$$

La probabilité que le vêtement choisi ait un défaut dans la forme est 0,0944.

***c*)** D'une part $p(C)\times p(F) = 0{,}12\times 0{,}0944 \approx 0{,}0113$
D'autre part $p(C\cap F) = 0{,}024$
Il n'y a pas égalité

Par conséquent, **les évènements C et F ne sont pas indépendants**.

3°/ En affirmant que 92% des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut, le directeur de l'usine se trompe. En effet, il confond la probabilité de l'évènement «le vêtement choisi n'a pas de défaut de forme **sachant qu'**il n'a pas de défaut de couleur» qui est une **probabilité conditionnelle**, avec celle de l'évènement «le vêtement choisi n'a aucun défaut» dont la probabilité est

$$p(\overline{C}\cap\overline{F}) = 0{,}88\times 0{,}92 = 0{,}8096.$$

4°/ Soit p la probabilité de choisir indépendamment 3 vêtements sans défaut.
On a $p = p(\overline{C}\cap\overline{F})^3 = 0{,}8096^3 \approx 0{,}531$

Exercice n°3 : (*4 points – QCM, les justifications n'étaient pas demandées*)

1°/ Si $f(x)=e^u$, alors $f'(x)=u'e^u$ où u est une fonction dérivable.
Par suite, avec $f(x)=e^{-2x+1}$, on a $\boldsymbol{f'(x)=-2e^{-2x+1}}$.

2°/ On peut raisonner par élimination.

x	-5		2		8		12
$g(x)$	-3	↘	-8	↗	1	↘	0

***a*)** Calculer une intégrale à l'aide d'un tableau de variation est une gageure...

***b*)** g change de signe sur $[2\,;8]$ et $g(12)=0$. Donc **$g(x)=0$ admet exactement deux solutions sur $[-5\,;12]$.**

3°/ Puisque (AB) est la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 1, $h'(1)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

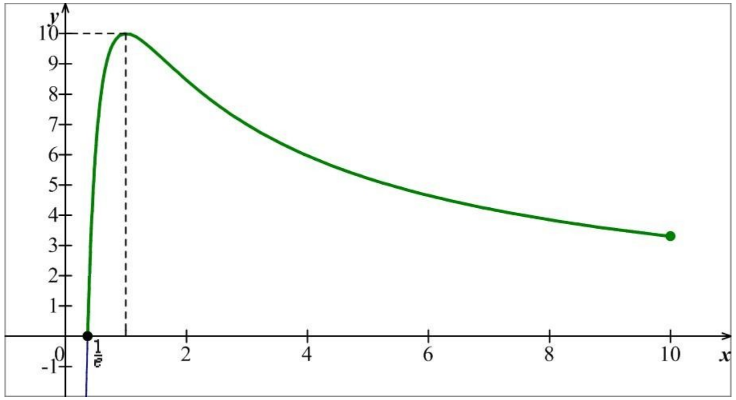
$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-0}{3-1} = \frac{3}{2} \qquad \text{donc } \boldsymbol{h'(1) = 1{,}5}$$

4°/ Graphiquement, la fonction h est négative sur $]0\,;1[$ et sur $]2{,}7\,;+\infty[$.
Les primitives H de h doivent donc être décroissantes sur ces intervalles.
Seule la courbe (a) respecte ces caractéristiques.

Exercice n°4 : (*6 points*)

1°/ a) Graphiquement...

- la réponse (3) correspond à l'abscisse du point d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.
- la réponse (4) correspond à la partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses.
- la réponse (5) correspond à l'ordonnée du «sommet» de la courbe.



b) On résout l'équation $B(x)=0$ dans l'intervalle $[0{,}1\,;10]$:

$$\frac{10(1+\ln x)}{x} = 0$$
$$1+\ln x = 0$$
$$x = e^{-1}$$

Le bénéfice mensuel de l'entreprise sera nul si celle-ci vend environ 37 objets.

2°/ a) $F(x) = 5\ln x(\ln x+2)$ avec $\begin{cases} u(x) = 5\ln x & \text{et} \quad u'(x) = \frac{5}{x} \\ v(x) = \ln x + 2 & \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$\text{donc} \quad F'(x) = \frac{5}{x}\times(\ln x+2)+\frac{1}{x}\times 5\ln x = \frac{5\ln x + 10 + 5\ln x}{x} = \frac{10+10\ln x}{x} = 10\times\frac{1+\ln x}{x}$$

Puisque $F'(x) = B(x)$, **F est une primitive de B** sur $[0{,}1\,;10]$.

b) On pose
$$\begin{aligned} M &= \int_{0,5}^{1,5} B(x)\,dx \\ &= \left[5\ln x(\ln x+2)\right]_{0,5}^{1,5} \\ &= 5\ln 1{,}5(\ln 1{,}5+2) - 5\ln 0{,}5(\ln 0{,}5+2) \\ &= 5\times(\ln 1{,}5)^2 + 10\ln 1{,}5 - 5(\ln 0{,}5)^2 - 10\ln 0{,}5 \\ &= 5\times(\ln 1{,}5 - \ln 0{,}5)(\ln 1{,}5+\ln 0{,}5) + 10(\ln 1{,}5 - \ln 0{,}5) \\ &= 5\ln 3\ln 0{,}75 + 10\ln 3 \\ &= \mathbf{\ln 3(10+5\ln 0{,}75)} \\ &\approx \mathbf{9{,}406} \end{aligned}$$

Lorsque l'entreprise produit et vend chaque mois 50 et 150 objets, son bénéfice mensuel moyen est **environ 9406 euros**.

3°/ Pour déterminer le maximum d'une fonction, le plus simple est encore d'étudier ses variations.

$B(x) = 10\times\frac{1+\ln x}{x}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1+\ln x & \text{et} \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x & \text{et} \quad v'(x) = 1 \end{cases}$

$$\text{donc} \quad B'(x) = 10\times\frac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln x)}{x^2} = 10\times\frac{1-1-\ln x}{x^2} = \mathbf{\frac{-10\ln x}{x^2}}$$

Puisque $x^2>0$, $B'(x)$ est du signe de $-10\ln x$

Or $\ln x > 0$ pour tout $x>1$.

x	0,1		1		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$	10	$\searrow$	

- $B(0{,}1) \approx -130{,}3$
- $B(10) \approx 3{,}3$

Le bénéfice mensuel B est maximal pour la production et la vente de 100 objets.
Le montant de ce bénéfice maximal est 10 000 euros.